

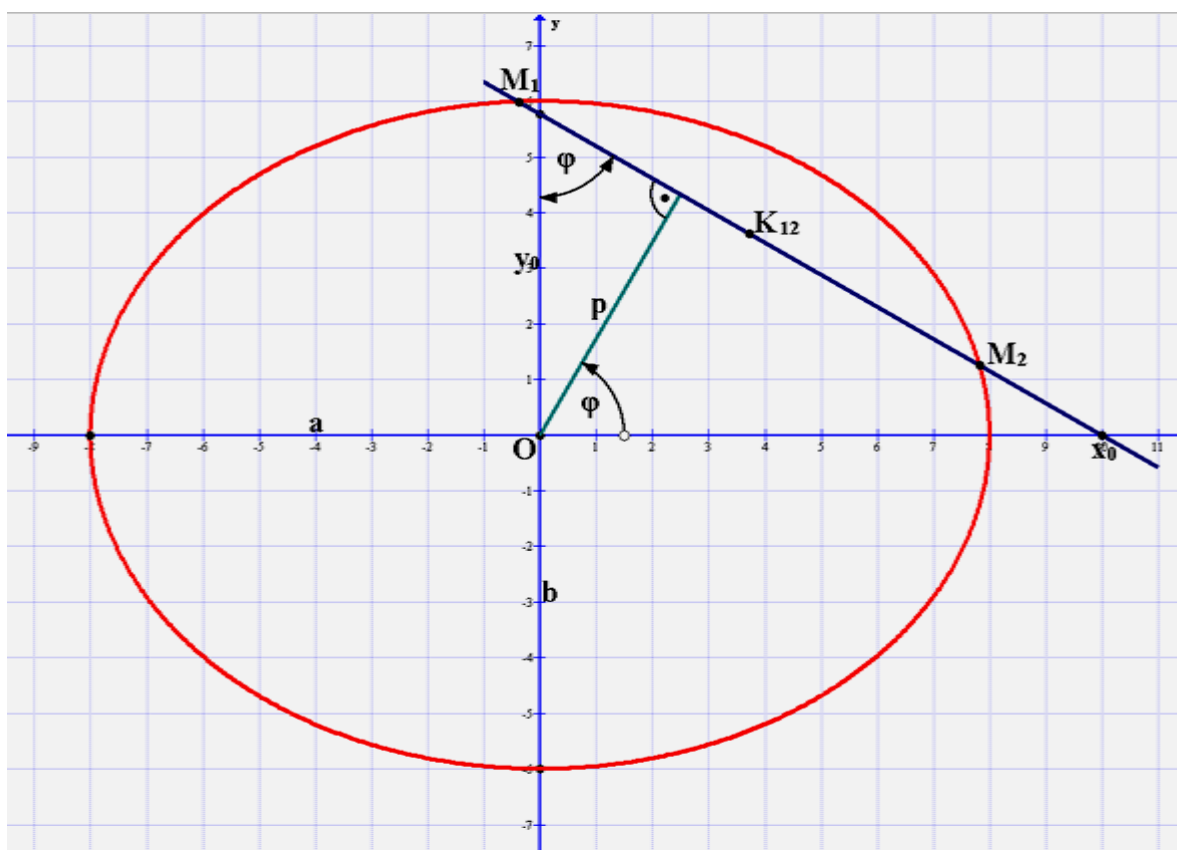
Egy ellipszisre vonatkozó tételről

Előző írásunk kapcsán – melynek címe: *Egy hasznos feladatról* – találkoztunk az [1] dolgozattal, melynek hatására készült az itteni. Valójában itt csak kifejtünk egy ott nem részletezett számítást.

A mondott tétel [1] szavaival:

Az ellipszis párhuzamos húrjainak felezőpontjai egy egyenesre esnek.

Az igazoláshoz tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Itt egy egyenest és egy ellipszist ábráztunk, jellemző adataikkal.

Az egyenes tengelymetszetes egyenlete:

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1. \quad (1)$$

A tengelymetszetek :

$$\frac{p}{x_0} = \cos \varphi \rightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{\cos \varphi}{p}, \quad \frac{p}{y_0} = \sin \varphi \rightarrow \frac{1}{y_0} = \frac{\sin \varphi}{p}. \quad (2)$$

Most (1) és (2) - vel az egyenes egyenlete:

$$\frac{\cos \varphi}{p} \cdot x + \frac{\sin \varphi}{p} \cdot y = 1. \quad (3)$$

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ féltengelyekkel bíró ellipszis középponti egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad (4)$$

Célunk az egyenes és az ellipszis $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ metszéspontjai, majd $\mathbf{K}_{12}$ középpontjuk koor - dinátáinak a meghatározása.

A metszéspontok $x_{1,2}$ koordinátáinak előállításához először (3) - ból kifejezzük y - t:

$$y = \frac{1}{\sin \varphi} \cdot (p - \cos \varphi \cdot x) ; \quad (5)$$

most (4) és (5) - tel:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \cdot \left[\frac{1}{\sin \varphi} \cdot (p - \cos \varphi \cdot x) \right]^2 &= 1 , \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} \cdot (p - \cos \varphi \cdot x)^2 &= 1 , \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} \cdot (p^2 - 2 \cdot p \cdot \cos \varphi \cdot x + \cos^2 \varphi \cdot x^2) &= 1 , \\ \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} \right) \cdot x^2 - \frac{2 \cdot p \cdot \cos \varphi}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} \cdot x + \left(\frac{p^2}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} - 1 \right) &= 0 ; \end{aligned} \quad (6)$$

rövidítő jelöléseket vezetünk be:

$$A = \frac{1}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} , \quad B = \frac{p \cdot \cos \varphi}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} , \quad C = \frac{p^2}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} - 1 ; \quad (7)$$

majd (6) és (7) - tel:

$$A \cdot x^2 - 2 \cdot B \cdot x + C = 0 . \quad (8)$$

A (8) másodfokú egyenletet a megoldó - képlettel megoldva:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{2 \cdot B \pm \sqrt{4 \cdot B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - A \cdot C}}{A} , \quad \text{tehát:} \\ x_1 &= \frac{B + \sqrt{B^2 - A \cdot C}}{A} , \quad x_2 = \frac{B - \sqrt{B^2 - A \cdot C}}{A} . \end{aligned} \quad (9)$$

A (9) abszcisszákhöz tartozó ordináták (5) - ből:

$$y_1 = \frac{1}{\sin \varphi} \cdot (p - \cos \varphi \cdot x_1) , \quad y_2 = \frac{1}{\sin \varphi} \cdot (p - \cos \varphi \cdot x_2) . \quad (10)$$

A $\mathbf{K}_{12}$ középpont koordinátái $\mathbf{M}_1$ és $\mathbf{M}_2$ koordinátáival:

$$x_k = \frac{x_1 + x_2}{2} , \quad y_k = \frac{y_1 + y_2}{2} . \quad (11)$$

Most (9) és (11 / 1) - gyel:

$$x_k = \frac{1}{2 \cdot A} \cdot (B + \sqrt{B^2 - A \cdot C} + B - \sqrt{B^2 - A \cdot C}) = \frac{2 \cdot B}{2 \cdot A} = \frac{B}{A}, \text{ tehát:}$$

$$x_k = \frac{B}{A}. \quad (12)$$

Majd (7) és (12) - vel:

$$x_k = p \cdot \frac{a^2 \cdot \cos \varphi}{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi}, \quad 0 \leq p_{\max}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi. \quad (13)$$

Ezután (10), (11 / 1) és (11 / 2) - vel:

$$y_k = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{\sin \varphi} \cdot (p - \cos \varphi \cdot x_1) + \frac{1}{\sin \varphi} \cdot (p - \cos \varphi \cdot x_2) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[2 \cdot \frac{p}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cdot (x_1 + x_2) \right] = \frac{p}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cdot x_k,$$

tehát:

$$y_k = \frac{p}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cdot x_k. \quad (14)$$

Most (13) és (14) - gyel:

$$y_k = \frac{p}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cdot p \cdot \frac{a^2 \cdot \cos \varphi}{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi} = \frac{p}{\sin \varphi} \cdot \left(1 - \frac{a^2 \cdot \cos^2 \varphi}{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi} \right) =$$

$$= \frac{p}{\sin \varphi} \cdot \frac{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi - a^2 \cdot \cos^2 \varphi}{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi} = \frac{p}{\sin \varphi} \cdot \frac{b^2 \cdot \sin^2 \varphi}{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi},$$

tehát:

$$y_k = p \cdot \frac{b^2 \cdot \sin \varphi}{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi}, \quad 0 \leq p_{\max}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi. \quad (15)$$

A (13) és (15) egyenleteket átírhatjuk:

$$x_k = k_x \cdot p, \quad y_k = k_y \cdot p, \quad (16)$$

hiszen **p** szorzói egy adott egyenes - hajlás és ellipszis esetén állandók. Most (16) - ból:

$$\frac{y_k}{x_k} = \frac{k_y \cdot p}{k_x \cdot p} = \frac{k_y}{k_x} = k \rightarrow \underline{\underline{y_k = k \cdot x_k}}, \quad (17)$$

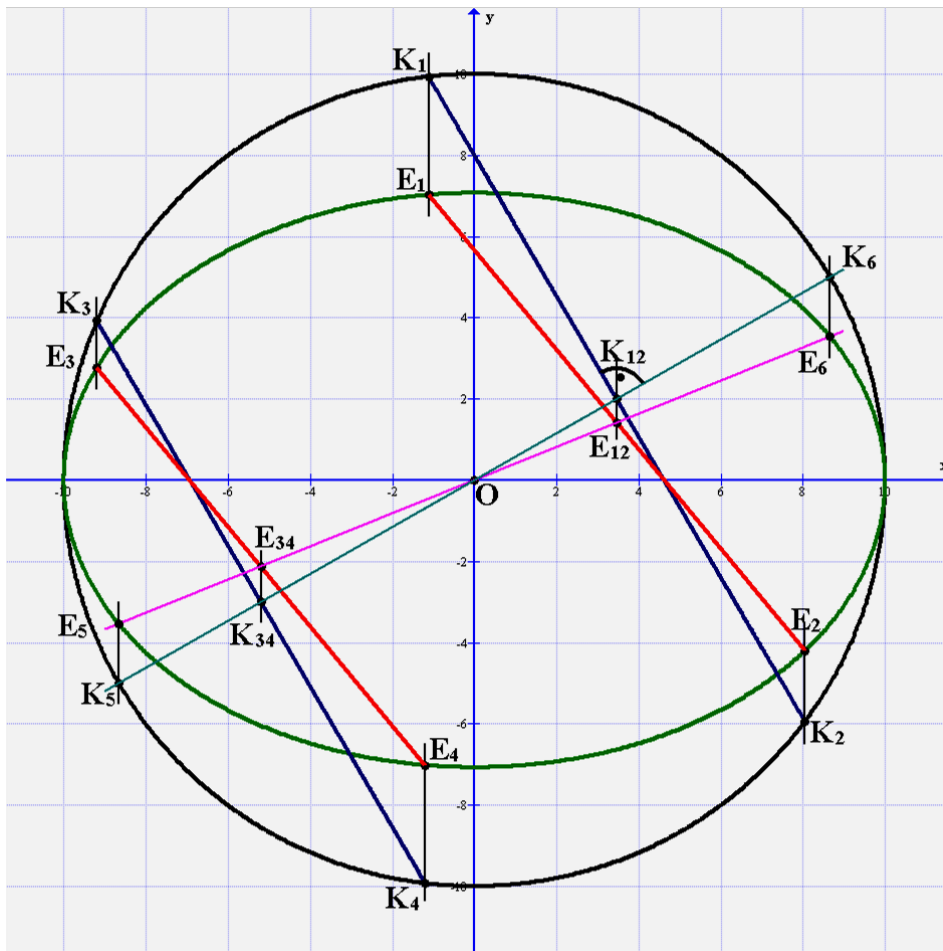
ami egy origón átmenő, **k** meredekségű egyenes egyenlete. Ez azt jelenti, hogy a különböző **p** értékkel bíró, azaz párhuzamos ellipszis - húrok középpontjai egy az origón át - haladó egyenesre esnek. (16) - ból látható, hogy **p = 0** esetén bármilyen irányú húr középpontja az origó – [1].

Ezzel kitűzött feladatunkat megoldottuk.

Megjegyzések:

M1. A megoldás egy érdekessége, hogy a $B^2 - A \cdot C$ mennyiségre nem volt szükség (9) -ből.

M2. A 2. ábra – melyet az előző dolgozatunkból vettünk át – segíti a szemléltetést. Itt a piros párhuzamos ellipszis - húrpar középpontjait az origón átmenő pink ellipszis - átmérő köti össze, a szerkesztés / rajzolás szerint is. (Az eltérő betűzés nem okozhat gondot.)



2. ábra

M3. A szövegben szereplő állandók kifejtése az alábbi.

$$k_x = \frac{a^2 \cdot \cos \varphi}{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi}, \quad k_y = \frac{b^2 \cdot \sin \varphi}{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi}; \quad (16^*)$$

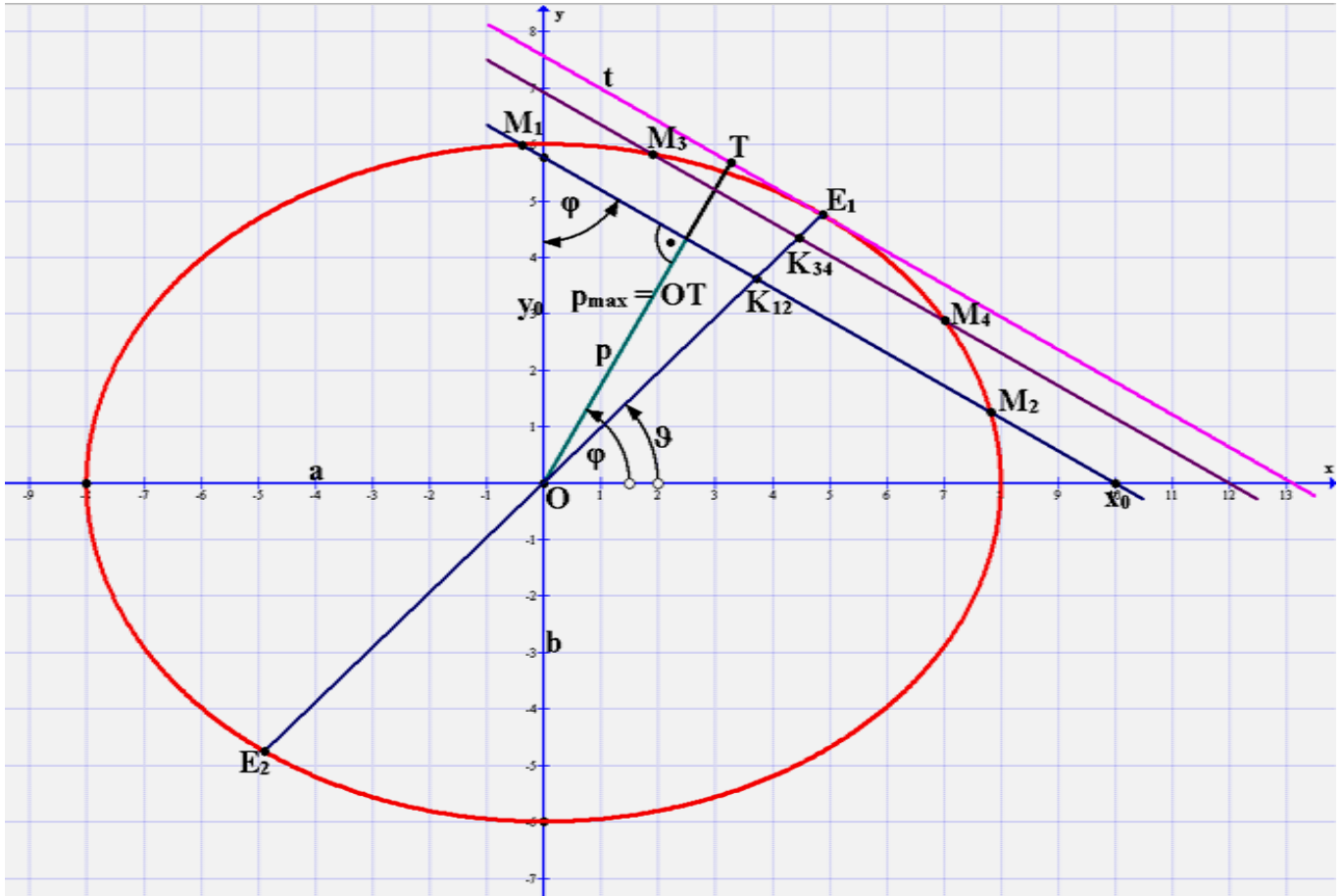
$$k = \frac{k_y}{k_x} = \frac{\frac{b^2 \cdot \sin \varphi}{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi}}{\frac{a^2 \cdot \cos \varphi}{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi}} = \frac{b^2 \cdot \sin \varphi}{a^2 \cdot \cos \varphi} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

tehát:

$$\underline{\underline{k = \frac{b^2}{a^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi.}} \quad (17^*)$$

Látható, hogy a (17*) képlet „érzékeny” bizonyos szögértékekre: $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_1 = 3 \cdot \frac{\pi}{2}$; ekkor célszerű lehet a (13) és (15) képletekhez visszatérni. Utóbbiak bármely szögértékre határozott eredményt adnak.

M4. Most meghatározzuk $p_{\max}$ értékét a φ szög függvényében. Ehhez tekintsük a 3. ábrát!



3. ábra

Úgy képzelhetjük el, hogy egy adott φ szög esetén p növekedésével a 3. ábra szerinti M_i és M_{i+1} ($i = 1, 3, \dots$) metszéspontok egymás és $K_{i, i+1}$ felé tartanak, mindaddig, amíg egybe nem esnek. Ekkor a szelő elérte határhelyzetét, vagyis érintővé (t) vált. Ezt a helyzetet úgy jellemezhetjük, hogy

$$x_1 = x_2 = x_E \text{ (és } y_1 = y_2 = y_E \text{)} . \quad (18)$$

Most (9) és (18) szerint:

$$x_1 = \frac{B + \sqrt{B^2 - A \cdot C}}{A} = x_2 = \frac{B - \sqrt{B^2 - A \cdot C}}{A} \rightarrow B^2 - A \cdot C = 0 \rightarrow B^2 = A \cdot C . \quad (19)$$

Majd (7) és (19) - cel:

$$\left(\frac{p \cdot \cos \varphi}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} \right)^2 = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} \right) \cdot \left(\frac{p^2}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} - 1 \right) ; \text{ kifejtve, rendezve:}$$

$$\frac{p^2 \cdot \cos^2 \varphi}{b^4 \cdot \sin^4 \varphi} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} \right) \cdot \frac{p^2}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} \right) ,$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} = \frac{p^2}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} - \frac{\cos^2 \varphi}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} \right) ,$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} = \frac{p^2}{a^2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 \varphi} ,$$

$$\frac{a^2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 \varphi}{b^2 \cdot \sin^2 \varphi} = p^2 ,$$

$$b^2 \cdot \sin^2 \varphi + a^2 \cdot \cos^2 \varphi = p^2 ,$$

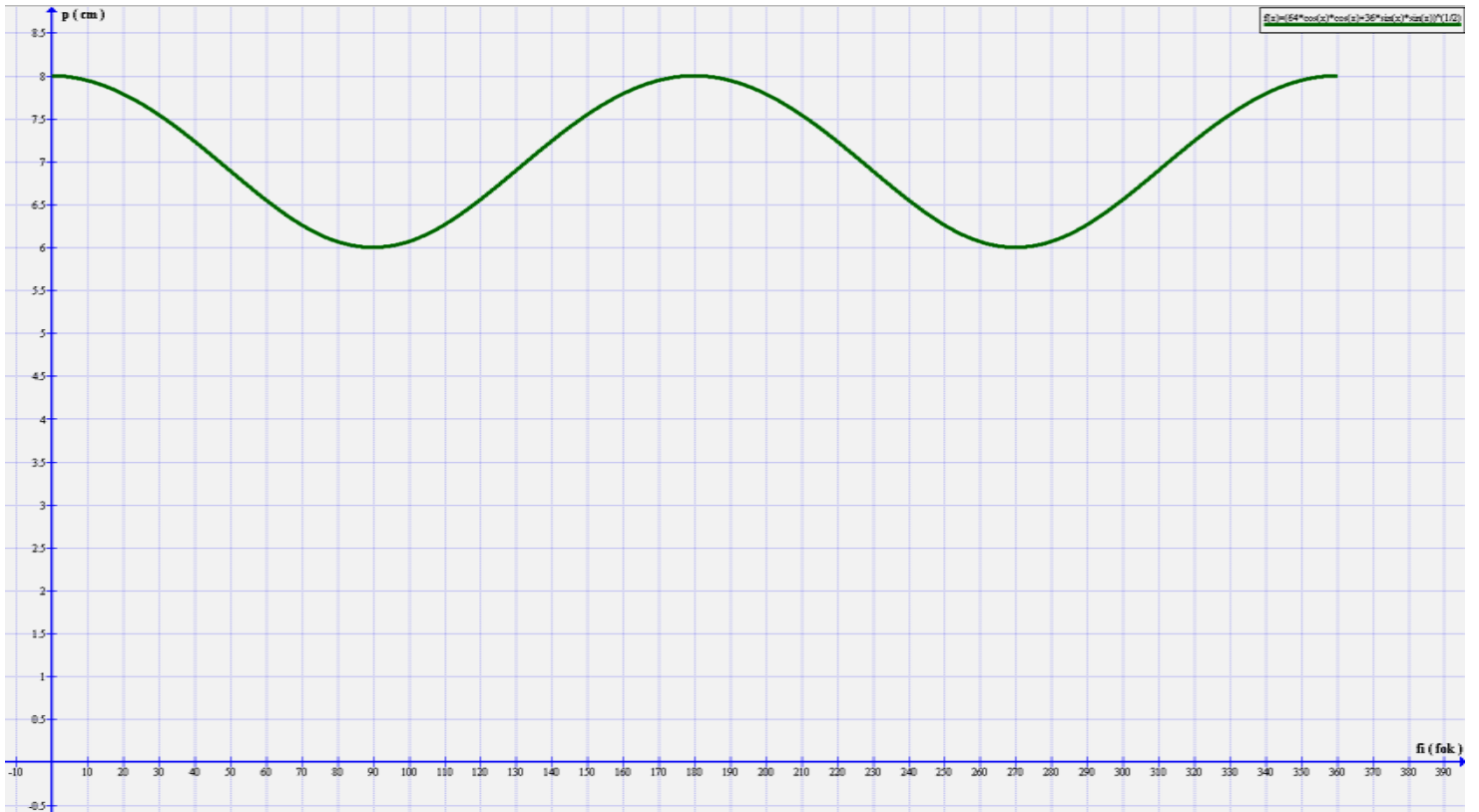
innen:

$$\underline{\underline{p_{\max}(\varphi) = \sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi} .}} \quad (20)$$

A (13) és (15) képleteknél említettek miatt, (20) - szal is:

$$0 \leq p \leq p_{\max}(\varphi) = \sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi} . \quad (21)$$

A (20) függvény lefutását a 4. ábra mutatja, ahol $a = 8 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$.



4. ábra

M5. Javasoljuk, hogy az érdeklődő Olvasó a (20) képletet vezesse le más úton is!

M6. Az ellipszis párhuzamos húrjainak felezőpontjai a 3. ábrán az E_1E_2 egyenesre esnek. Ezen egyenes meredeksége (17*) és a 3. ábra szerint:

$$k = \frac{b^2}{a^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \vartheta . \quad (17^{**})$$

Ez megfelel a szemléletnek is, hiszen a 3. ábráról azonnal leolvasható, hogy az 1. sík - negyedben: $\vartheta \leq \varphi$.

M7. A (20) képlet egy megfelelőjét már levezettük egy korábbi dolgozatunkban, mely - nek címe: *Az ellipszispályán mozgó pont néhány érdekes összefüggéséről.*

Most levezetjük azt ismét, másképpen. Ehhez kiindulunk az ellipszis érintőjének ismert egyenletéből:

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1 ; \quad (22)$$

itt x_1 és y_1 az ellipszis érintési pontjainak koordinátái, x és y az egyenes futópontjának koordinátái. Válasszuk utóbbiakat a t érintő - egyenes tengelymetszeti pontjaiból! Ekkor:

$$x = x_{0,t} \rightarrow y = 0 , \quad (23)$$

ami (22) - vel:

$$\frac{x_{0,t} \cdot x_1}{a^2} = 1 \rightarrow x_1 = \frac{a^2}{x_{0,t}} . \quad (24)$$

majd hasonlóan eljárva:

$$y = y_{0,t} \rightarrow x = 0 , \quad (25)$$

ami (22) - vel:

$$\frac{y_{0,t} \cdot y_1}{b^2} = 1 \rightarrow y_1 = \frac{b^2}{y_{0,t}} . \quad (26)$$

Ezután (24) és (26) - ből, (2) - vel is:

$$x_1 = a^2 \cdot \frac{\cos \varphi}{p_{\max}} , \quad y_1 = b^2 \cdot \frac{\sin \varphi}{p_{\max}} ; \quad (27)$$

rendezve:

$$\cos \varphi = p_{\max} \cdot \frac{x_1}{a^2} , \quad \sin \varphi = p_{\max} \cdot \frac{y_1}{b^2} ; \quad (28)$$

az ismert trigonometriai azonosság szerint:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 ; \quad (29)$$

most (28) és (29) - cel:

$$p_{max}^2 \cdot \frac{x_1^2}{a^4} + p_{max}^2 \cdot \frac{y_1^2}{b^4} = 1 , \text{ innen:}$$

$$p_{max}^2 \cdot \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} \right) = 1 \rightarrow p_{max}^2 = \frac{1}{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}} = \frac{a^4 \cdot b^4}{b^4 \cdot x_1^2 + a^4 \cdot y_1^2} , \text{ innen pozitív gyökvonással:}$$

$$p_{max} = \frac{a^2 \cdot b^2}{\sqrt{b^4 \cdot x_1^2 + a^4 \cdot y_1^2}} . \quad (30)$$

A (30) képlet megegyezik a korábbi dolgozatban kapottal, a jelölésektől eltekintve.

[Az ottani jelölésekkel így írtuk (30) - at:

$$h = \frac{a^2 \cdot b^2}{\sqrt{b^4 \cdot x_0^2 + a^4 \cdot y_0^2}} . \quad (30^*)$$

Látjuk, hogy más jelölést kellett alkalmaznunk, mert itt mást jelent a „ φ ” index, mint ott.]

M8. Az érintési pontok koordinátái (20) és (27) - tel:

$$x_1 = a^2 \cdot \frac{\cos \varphi}{p_{max}} , \quad y_1 = b^2 \cdot \frac{\sin \varphi}{p_{max}} , \quad (31)$$

vagyis:

$$x_1(\varphi) = a^2 \cdot \frac{\cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi}} , \quad y_1(\varphi) = b^2 \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi}} . \quad (32)$$

A (32) képletek adják meg az ellipszis érintési pontjának koordinátáit, az érintő normális φ hajlásszögének függvényében.

A $d = OE$ félátmérő hosszára, (32) -vel is:

$$d^2 = x_1^2 + y_1^2 = \frac{a^4 \cdot \cos^2 \varphi + b^4 \cdot \sin^2 \varphi}{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi} \rightarrow d(\varphi) = \sqrt{\frac{a^4 \cdot \cos^2 \varphi + b^4 \cdot \sin^2 \varphi}{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi}} . \quad (33)$$

További átalakításokkal (33 / 1) - ből, (17**) - gal is:

$$d^2 = \frac{a^4 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \left(1 + \frac{b^4 \cdot \sin^2 \varphi}{a^4 \cdot \cos^2 \varphi} \right)}{a^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \left(1 + \frac{b^2 \cdot \sin^2 \varphi}{a^2 \cdot \cos^2 \varphi} \right)} = a^2 \cdot \frac{1 + \frac{b^4}{a^4} \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi} = a^2 \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta}{1 + \frac{a^2}{b^2} \cdot \operatorname{tg}^2 \vartheta} = \frac{a^2}{\cos^2 \vartheta} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a^2}{b^2} \cdot \operatorname{tg}^2 \vartheta} ,$$

innen:

$$d^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \vartheta + \frac{a^2}{b^2} \cdot \sin^2 \vartheta} = \frac{a^2 \cdot b^2}{b^2 \cdot \cos^2 \vartheta + a^2 \cdot \sin^2 \vartheta} \rightarrow d(\vartheta) = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 \cdot \sin^2 \vartheta + b^2 \cdot \cos^2 \vartheta}}, \quad (34)$$

majd $d \rightarrow \rho$ cserével:

$$\rho(\vartheta) = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 \cdot \sin^2 \vartheta + b^2 \cdot \cos^2 \vartheta}}, \quad (34^*)$$

ami az ellipszis (egyik) polárkoordinátás egyenlete.

Ennek független levezetését ajánljuk figyelmébe az érdeklődő Olvasónak, gyakorlásként! Hogy (34*) kijött az újabb képletekkel, az egy megerősítést ad rájuk.

Képleteink egy újabb ellenőrző összefüggése lehet a kicsit kiegészített 3. ábráról levehető, de a (3) képletből is adódó

$$p = x_1 \cdot \cos \varphi + y_1 \cdot \sin \varphi \quad (35)$$

összefüggés, ami (35) - ből kiindulva (32) és (20) alapján rögtön belátható:

$$\begin{aligned} p(35) &= a^2 \cdot \frac{\cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \cdot \cos \varphi + b^2 \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \cdot \sin \varphi = \\ &= \frac{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi}} = \sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi} = p(20). \end{aligned} \quad (!)$$

M9. Úgy tűnik, hogy a kitűzött feladat megoldása után még más – mondhatni rész - feladatokat – is megoldottunk. Érdemes vizsgálni az eredményeknek a korábbi eredményekhez való kapcsolódását, az itt vizsgáltaktól különböző korábbi eredményekre is. Van ilyen, még ha csak „érintőlegesen” is. Azért is érdemes ezt a fajta újraszámítást elvégezni, mert lehet, hogy a réginél szebb, kényelmesebben használható az új eredmény. Továbbá ellenőrzést is adnak egymásra az eltérő módon nyert (egyező) eredmények. Úgy látjuk, hogy a (20) képlet szebb, kényelmesebben alkalmazható lehet, mint a (30), miközben ugyanazt adják, kicsit máshogyan.

M10. Megfogalmazódhat egyesekben, hogy túl sok itt az ellenőrzés. Kijelenthetjük, hogy ellenőrzésből sosem elég. Nincs olyan, hogy „túl sok ellenőrzés”. Aki ezt nem így látja, annak még hátravan néhány megrázó élmény. Ezt az élményt az egyszerű emberek, mint e sorok írója is, egyszerűen csak pofáraesésnek hívják. Kell ez nekünk? Ez nem, de a nyugodt alvás – az igen. A matekból jobbaknak is.

M11. Az [1] dolgozatban azt írják, hogy a folytonos, zárt görbék közül csak az ellipszisre teljesül a bevezetésben mondott tétel állítása. Ez érdekes.

Forrás:

[1] – http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa/_site/index.php/teaching/stud-downloadables/category/6-ma-thesis?download=44:az-ellipszisek-jellemzese

Összeállította: ***Galgóczy Gyula***
ny. mérnöktanár

Szödliget, 2020. 08. 09.

Továbbiak: <https://galgoczy.net/>